www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE 1989

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

OPTION PHYSIQUE-MATHÉMATIQUES

DURÉE: 3 HEURES

On se propose d'étudier certaines propriétés des courbes Γ_a dont les équations paramétriques dans un repère orthonormé (Ox,Oy) sont données par les formules :

$$(\Gamma_a) \quad x = \frac{t^3}{1 - t^2} \; ; \quad y = \frac{1 - at}{1 - t^2} \quad , \; a \text{ constante réelle.}$$

I

1. Comment passe-t-on de la courbe Γ_a à la courbe Γ_{-a} ?
   On se contentera, dans la suite, de l'étude pour $a \in [0, +\infty[$.

2. Etudier la courbe au voisinage du point A (0,1) correspondant à la valeur $t = 0$.

3. a. Effectuer un développement limité au troisième ordre au voisinage de $t = 1$, des fonctions $(t - 1)x$ et $(t - 1)y$. Discuter la position de la branche infinie de Γ_a correspondant à $t = 1$, par rapport à son asymptote, dont on précisera l'équation.

   b. Etudier les autres branches infinies de Γ_a.

4. a. Etudier la variation de x.

   b. Montrer que y' ne change de signe que si l'on a : $0 \leqslant a < 1$. On situera les changements de signe de cette dérivée par rapport à ceux de x' en discutant selon les valeurs de a.

   c. Etudier la nature du point de paramètre $t = \sqrt{3}$ pour la courbe correspondant à la valeur $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Tracer les courbes correspondant aux valeurs :

   $a = 0$; $a = \frac{3}{4}$; $a = \frac{4}{5}$; $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (On dressera pour chacune un tableau de variations).

II

1. Discuter l'existence d'un point double sur la courbe Γ_a. On donnera, lorsqu'il existe, les coordonnées de ce point double.

2. Discuter le nombre de points d'inflexion de Γ_a.

III

1. On considère une droite du plan, d'équation $ux + vy + w = 0$ avec $u \neq 0$. En formant l'équation du troisième degré vérifiée par le paramètre t d'un point commun à cette droite et à Γ_a, montrer que trois points M_1, M_2, M_3 de Γ_a sont alignés si et seulement si leurs paramètres t_1, t_2, t_3 vérifient la relation :

   (E) $\quad a(t_1 + t_2 + t_3) - (t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1) + at_1t_2t_3 = 0.$

2. a. Montrer que (E) reste vraie pour $t_1 = t_2 = t$ paramètre d'un point M de Γ_a, si l'on prend $t_3 = \theta$ paramètre du point P où la tangente à Γ_a en M recoupe cette courbe excepté pour un nombre fini de valeurs de t que l'on précisera.
   A quoi correspondent les solutions de (E) qui vérifient $t_1 = t_2 = t_3$?

   b. Montrer que dans le cas où Γ_a possède trois points d'inflexion, ces trois points sont alignés.

IV

Dans cette section, on suppose $a > 0$. On désire établir des propriétés associées à la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

$(t_1,t_2) \longmapsto t_3 = \varphi(t_1,t_2)$: où φ est définie par le fait que les paramètres (t_1,t_2,t_3) vérifient la relation (E) de la section III.

1. Montrer que φ est continue sur son domaine de définition.

2. On associe à φ la fonction $f(t_1,t_2) = \varphi\big(0,\varphi(t_1,t_2)\big)$. Etablir l'égalité suivante lorsque les deux membres sont définis : $f\big(f(t_1,t_2),t_3\big) = f\big(t_1,f(t_2,t_3)\big)$.

3. Etudier pour $a > 1$ fixé la suite récurrente :

   $t_0 \in [0, 2a]$; $n \geqslant 0$: $t_{n+1} = f(t_n,t_n)$.

   Etudier la convergence uniforme sur chacun des intervalles $[0, 2a]$, $]0, 2a[$, $[b, c]$ avec $0 < b < c < 2a$, de la suite de fonctions définie par la récurrence :

   $f_0(t) = t$; $n \geqslant 0$: $f_{n+1}(t) = f\big(f_n(t), f_n(t)\big)$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail